

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Louange à notre seigneur "ALLAH" qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement .Louange à notre créateur qui nous incités à acquérir le savoir. C'est à lui que nous adressons toute notre gratitude en premier lieu.

Je tiens à remercier mon promoteur Mr le professeur GASMI Abdelkader pour la confiance qu'il m'a témoigné en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions m'ont permis de finaliser ce modeste travail .Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

MERCI

Table des matières

Introduction	2
1 Quelques Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	3
1.0.1 Résumé:	3
1.1 Introduction :	3
1.2 Description d'écoulement d'un fluide :	4
1.2.1 Description de Lagrange :	4
1.2.2 Description d'Euler:	5
1.3 Equations du mouvement des fluides	6
1.3.1 Equation de continuité :	6
1.3.2 L'équation d'Euler	8
1.3.3 Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent	9
1.3.4 Dynamique des fluides :	10
1.3.5 Ecoulement irrotationnel:	12
1.3.6 Ecoulement potentiel:	12
1.3.7 Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible: . . .	12
1.3.8 Utilisation de la théorie de la variable complexe :	14
1.4 Transformation conforme :	15
1.4.1 Définitions	15
1.4.2 Fonctions Holomorphes	15
1.4.3 Fonctions analytiques	15
1.4.4 Formule de Cauchy:	16

1.4.5	Quelques transformations classiques	16
1.4.6	Transformation de Schwarz-Christoffel	17
2	Problème d'un fluide issu d'un réservoir rectangulaire	19
2.1	Résumé	19
2.2	Introduction	19
2.3	Position du problème	20
2.4	Formulation du problème.	23
2.5	Résolution du problème:	23
3	Annexe	32
3.1	Outils mathématiques de la théorie des champs :	32
3.1.1	Opérateur gradient :	32
3.1.2	Gradient d'un vecteur :	33
3.2	Opérateur divergence :	33
3.2.1	Théorème (Théorème de Green-Ostrogradski) :	33
3.2.2	Expressions analytique	33
3.3	Opérateur rotationnel :	34
3.3.1	Expressions analytique	34
3.4	Opérateur Laplace :	34
3.4.1	Expressions analytique :	35
3.4.2	Expression analytique du Laplace vectoriel :	35
3.5	Opérateur symbolique nabla :	35
3.5.1	Formulaire relatif aux opérateurs :	36
	Conclusion générale	37
	Bibliographie	39

Introduction

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre autour des objets de différentes formes sont étudiés due à leurs importance d'application.

Les problèmes classiques des écoulements d'un fluide parfait ont été étudié par beaucoup de chercheurs. Les premiers travaux sont caractérisés par l'utilisation de la méthode de transformation conforme basée sur la formule de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre d'un issu d'un réservoir de forme rectangulaire, l'écoulement est supposé bidimensionnel et potentiel d'un fluide parfait. Puisque l'écoulement est bidimensionnel et potentiel, alors le plan des variables (x, y) d'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$.

Dans le cas où on néglige les forces de gravité et les tensions de surface, la solution du problème peut être calculer analytiquement en utilisant le théorème des lignes de courant libre introduite par Kirchhoff (1869). Si l'effet des forces de gravité ou bien les tensions de surface ne sont pas négligées, le problème ne peut être résolu exactement.

Notre travail est composé de deux chapitre I, II et une annexe :

Dans le chapitre I, on présente les notions préliminaires et les définitions générales de la mécanique des fluides. Une présentation de la théorie de la variable complexe et les transformations conformes et leurs relations avec les écoulements bidimensionnels et potentiel .

Dans le chapitre II, on considère qui les effets des forces de gravité et les tensions de surface sont négligés. On utilise alors la méthode des lignes des courants libres introduites par Kirchhoff qui est basée sur les transformations conformes pour obtenir une solution exacte.

L'écoulement bidimensionnel stationnaire dû à la présence d'un obstacle de forme quelconque sur un radier plat.

Le problème mixte (problème de Riemann-Hilbert) est la bijection entre les frontières des domaines du plan physique et un autre plan auxiliaire. Les résultats trouver concordent avec ceux de Gasmi dans le cas où le largeur du réservoir est infini.

Chapitre 1

Quelques Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.0.1 Résumé:

Dans ce chapitre, on va rappeler des notions préliminaires et générales sur les écoulements des fluides, en expliquant les équations nécessaires du mouvement des fluides.

Des simplifications sont opérées dans ces équations pour obtenir des solutions.

1.1 Introduction :

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie les écoulements des fluides c'est-à-dire des liquides lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes.

Le mouvement des liquides est régi par : les équations de Navier-Stokes, l'on considère en général les liquides comme étant incompressibles.

La mécanique des fluides se compose en deux grandes sous-branches :

Statique des fluides ou hydrostatique : qui étudie les fluides au repos.

C'est historiquement le début de la mécanique des fluides avec la poussée d'Archimède l'étude de la pression.

Dynamique des fluides : qui étudie les fluides en mouvement.

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres.

Un fluide est donc un milieu matériel contenu déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides.

Par la suite, une particule d'un fluide ou un point d'un fluide sont identifiés au volume infinitésimal décrit plus haut. Ainsi le déplacement d'une particule de fluide est identifié non pas au déplacement d'une molécule mais au déplacement d'un élément de volume, et donc c'est un déplacement moyen de toutes les molécules qui constituent cette particule qui doit posséder toutes les propriétés du fluide. On note aussi qu'un fluide considéré comme un milieu continu occupant un domaine Ω de l'espace, ses propriétés sont définies comme fonctions de la variable $x \in \Omega$ et de temps t .

Ainsi la masse, le volume et la viscosité seront des fonctions de $X \in \Omega$, $m(x, t)$, $\rho(x, t)$ et $\mu(x, t)$.

Un fluide en mouvement est décrit à l'aide des grandeurs suivantes : les trois composantes de la vitesse $\vec{v}$, la pression p , la densité ρ , la viscosité μ et la température T .

Ces grandeurs sont des fonctions des coordonnées x, y, z (d'un point de l'espace occupé par le fluide) et du temps t . On établit les équations du mouvement en basant sur les principes de conservation.

La surface libre de l'eau

Quand un liquide est dans un récipient il est en contact avec les parois de ce dernier mais aussi avec l'air. La surface du liquide en contact avec l'air est aussi appelée surface Libre.

1.2 Description d'écoulement d'un fluide :

1.2.1 Description de Lagrange :

Dans la description de Lagrange, on s'intéresse à l'histoire de chaque particule de fluide. Considérons une particule de fluide P , placée en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0 et suivons la

(approche mécanistique) au cours de son mouvement on peut déterminer la trajectoire de la particule de fluide si l'on connaît son équation horaire

$$\begin{cases} x = (x_0, y_0, z_0, t) \\ y = (x_0, y_0, z_0, t) \\ z = (x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

La vitesse de la particule s'écrit :

$$\vec{v}(p) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Description de Lagrange $\implies$ Trajectoire des particules de fluide

1.2.2 Description d'Euler:

L'approche d'Euler est à mettre parallèle avec l'approche de Maxwell en Électromagnétisme. De la même manière que l'on définit le champ électromagnétique en tout point de l'espace, à l'instant t , ici, on va considérer le fluide dans son ensemble à

l'instant t .

On définit en chaque point du système les grandeurs :

$\rho(x, y, z, t), p(x, y, z, t), \vec{v}(x, y, z, t) \dots \dots \text{etc.}$

Notion de ligne de courant :

Une ligne de courant ou ligne d'écoulement, est une ligne de champ de la vectrice vitesse c'est-à-dire une courbe tangente en tout point $M(x, y, z)$ à $\vec{v}(x, y, z, t)$ à l'instant t .

L'ensemble des lignes de courant peut évoluer au cours du temps. L'équation de la ligne de courant s'obtient en résolvant les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Où v_x, v_y , et v_z sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$.

Description d'Euler $\implies$ ligne de courant

Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe C fermée constituent un tube de courant.

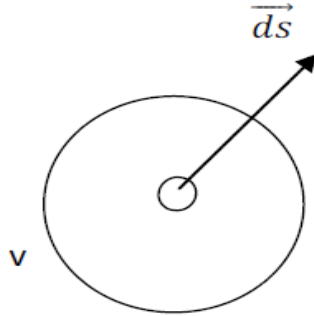
1.3 Equations du mouvement des fluides

1.3.1 Equation de continuité :

Soit une partie d'un fluide de masse volumique ρ délimitée par une surface fermée S_f

(De volume v).

Soit d_s un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée (voir figure (1.1)).



Figure(1.1)

La partie de fluide a une masse $m = \int \int_v \int \rho dv$, le débit massique sortant de la surface S_f est égale à:

$$\int_{S_f} \int \rho \vec{v} d\vec{s}$$

La conservation de la masse s'écrit:

$$\frac{dm_s}{dt} - \int_{S_f} \int \rho \vec{v} d\vec{s} = \int \int_v \int \frac{\partial p}{\partial t} dv$$

$\frac{dm_s}{dt}$ Où représente le débit massique de fluide interne au volume considéré compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits compte tenu du théorème d'ostrogradsky:

$$\int_{S_f} \int \rho \vec{v} d\vec{s} = \int \int \int (\text{div}(\rho \vec{v})) dv$$

L'équation de conservation de la masse peut être écrite:

$$\frac{dm_s}{dt} = \int \int_v \int \left[\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dv$$

Remarque 1.3.1 :

Sauf précision contraire, nous appliquerons l'équation de conservation de masse en absence de source ou de puits, soit:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Deux cas particuliers sont alors à considérer.

Le cas1 du fluide incompressible $\rho = cte \implies \text{div } v = 0$ pour un écoulement stationnaire ou in stationnaire.

Cet écoulement est dit isovolume.

Le cas2 de l'écoulement stationnaire

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right) \implies \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 = \rho \text{div } \vec{v} + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} \rho$$

En dehors de la possibilité **cas1**, il existe la possibilité d'écoulement **isovolumes** tels que $\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$ où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, à la vectrice vitesse.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement :

Si la force externe agissant sur un objet, ou sur un système d'objets (un système isolé) est nulle, alors la quantité de mouvement total de l'objet ou du système d'objet de meure constante.

1.3.2 L'équation d'Euler

Soit ϑ un domaine délimité par une surface S . La résultante des forces surfaciques s'exerçant sur ce volume est donnée par l'intégrale:

$$-\iint_S P \vec{u}_\eta ds$$

Où P est la pression.

En transformant l'intégrale de surface en une intégrale de volume.

Nous obtenons:

$$-\iint_S P \vec{u}_\eta ds = - \int \int \int \vec{\text{grad}} P d\vartheta$$

Cette égalité montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force ($\vec{\text{grad}} P$) exercée par le fluide environnant.

Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors:

$$\int \int \int \rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) d\vartheta = - \int \int \int \vec{\text{grad}} P d\vartheta$$

Le domaine étant arbitraire, on aura donc:

$$\rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\vec{\text{grad}} P \quad (1.3.1)$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique, ..., etc.), chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force $\vec{F}_{champ}$.

Cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (1.3.1) de sorte que l'équation (1.3.1) doit s'écrire sous la forme:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P + \vec{F}_{champ}$$

Cette équation a été établie par L'Euler (1755).

1.3.3 Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent

D'un fluide parfait incompressible :

Un **fluide parfait** est un fluide dont l'écoulement se fait sans frottement.

On considère un écoulement permanent isovolume d'un fluide parfait entre les sections s_1 et s_2 , entre les quelles il n'y a aucune machine hydraulique, (pas de pompe, ni de turbine) (voir figure (1.2)).

Soit m la masse et v le volume du fluide qui passe à travers la section s_1 entre les instants t et $t + \Delta t$. Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section s_2 .

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants t et $t + \Delta t$ (La variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures: Poids et forces pressantes), on obtient :

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + P = Cte$$

P Est la pression statique, $\rho g z$ est la pression de pesanteur, $\rho \frac{v^2}{2}$ est la pression cinétique.

En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit ρg , on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pression exprimées en mètres de colonne de fluide).

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = H = Cte$$

H : est la hauteur totale

$\frac{P}{\rho g}$: est la hauteur de pression

z : est la cote.

$\frac{v^2}{2g}$: est la hauteur cinétique

$z + \frac{P}{\rho g}$: est la hauteur piézométrique.

Cas d'un écoulement (1)→(2) sans échange de travail :

Lorsque, dans un écoulement d'un fluide parfait, il n'y a aucune machine (ni pompe, ni turbine) entre les points (1) et (2) d'une même ligne de courant, la relation de **Bernoulli** peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + (P_2 - P_1) = 0$$

Ou:

$$\frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + (z_2 - z_1) + \frac{(P_2 - P_1)}{\rho g} = 0$$

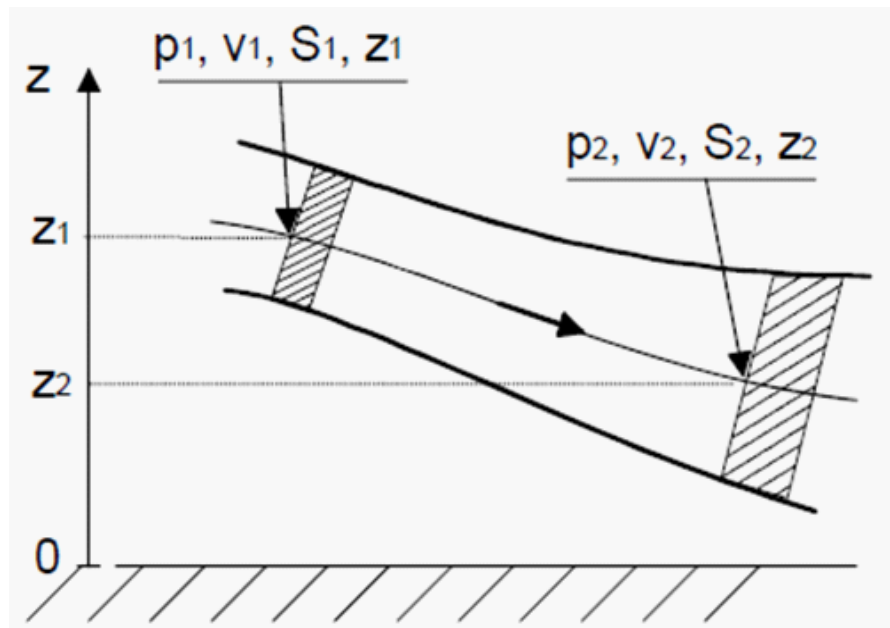


Figure (1.2)

1.3.4 Dynamique des fluides :

Le débit :

Est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite

de la conduite par la durée de cet écoulement.

Débit masse :

Si Δm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit-masse est :

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Unité : Kg/s

Débit-volume

Si Δv est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit-volume est :

$$q_v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Unité : m^3/s .

Relation entre q_m et q_v :

La masse volumique ρ est donnée par la relation :

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta v} \text{ où } q_m = \rho q_v$$

Remarque 1.3.2 :

Les liquides sont incompressibles et peu dilatables (masse volumique constante), on parle alors d'écoulements isovolumes.

Écoulements permanents ou stationnaires :

Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique,.....) ont une valeur constante au cours du temps.

1.3.5 Ecoulement irrotationnel:

Dans les régions d'écoulement, loin des parois solides où le fluide peut être considéré comme non visqueux, l'écoulement est dit irrotationnel et on a alors la condition:

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot} \vec{V} = 0$$

$\vec{\Omega}$ représente le vecteur de rotation ou de vortécité.

$\vec{\Omega}$ est, par définition, nul pour un écoulement irrotationnel.

Cette condition apporte des simplifications importantes dans les équations du mouvement.

1.3.6 Ecoulement potentiel:

On rappelle aussi qu'en mathématique une fonction dont le rotationnel est nul, peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire, car on a toujours:

$$\overrightarrow{rot} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \right) = 0.$$

On peut donc réduire:

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

φ représente la potentielle de vitesse.

On déduit que, du à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulements irrotationnels sont dit potentiels.

1.3.7 Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible:

On rappelle la forme de l'équation de continuité pour un fluide incompressible:

$$\text{div} \left(\vec{V} \right) = 0$$

En substituant cette équation dans la définition du potentiel de vitesse.

On a:

$$\nabla (\nabla \varphi) = 0$$

Alors

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Soit

$$\Delta \varphi = 0$$

Δ Indique le Laplace et ∇ l'opérateur gradient.

On dit qu'un écoulement est bidimensionnel si la vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe. Dans ce cas l'équation du potentiel de vitesse se réduit à:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Et étant une fonction potentielle continue à deux variables, alors il existe une fonction dite fonction potentielle conjuguée ou fonction de courant qui vérifie:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

On a aussi pour le potentiel de vitesse:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ et } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

En identifiant ces deux systèmes d'équations, on aboutit aux relations suivantes entre φ et ψ :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Ces équations sont connues comme celles de Cauchy-Riemann, qui nous permettent de déduire que φ et ψ sont uniformément différentiables dans le domaine de l'écoulement et qui permettent aussi de trouver le potentiel de vitesse à partir de la fonction de courant ou inversement.

1.3.8 Utilisation de la théorie de la variable complexe :

Soient φ la fonction potentielle et ψ la fonction de courant respectivement d'un écoulement potentiel bidimensionnel. On rapporte le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant $z = x + iy$ puis on définit la fonction complexe par:

$$f(z) = \varphi + i\psi$$

i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

$f(z)$ Est appelé le potentiel complexe de l'écoulement. Parce que la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ vérifient l'équation de Laplace, de plus on a :

$$v_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Alors les relations de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

La théorie des variables complexes offre une méthode, très puissante pour obtenir des solutions de quelque écoulement. si le plan (x, y) est considéré comme plan de la variable complexe $z = x + iy$ la fonction $f(z)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement.

De plus:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_x - iv_y$$

Sera aussi analytique dans le plan d'écoulement. Cette très importante propriété va nous permettre d'utiliser, par la suite la théorie des fonctions analytiques complexes pour résoudre notre problème considéré.

1.4 Transformation conforme :

1.4.1 Définitions

Une transformation $z = x + iy \rightarrow Z(z) = X(x; y) + iY(x; y)$ est dite **conforme** si elle conserve les angles. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit conforme est que la fonction $Z(z)$ soit analytique.

1.4.2 Fonctions Holomorphes

On note $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r, r > 0\}$

$D(z_0, r)$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r .

$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| \leq r, r > 0\}$

$\bar{D}(z_0, r)$ est appelé disque fermé de centre z_0 et de rayon r .

Définition 1.4.1 : Soit f une application de $D(z_0, r)$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe en z_0

si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, et dans ce cas elle sera notée $f'(z_0)$.

f : holomorphe en $z_0 \iff f$: dérivable en z_0 .

Proposition 1.4.1 :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

1.4.3 Fonctions analytiques

Pour ce paragraphe, O est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$; f une application de O dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de O .

Définition 1.4.2 : On dit que f est analytique en z_0 s'il existe un réel $r > 0$ (dépendant de z_0)

tel que $D(z_0; r) \in O$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes tels que :

$$\forall z \in D(z_0; r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit aussi que f est analytique en z_0 si elle est développable en série entière au voisinage de z_0 .

On peut remarquer que $a_0 = f(z_0)$.

1.4.4 Formule de Cauchy:

Soient O un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de O et $r > 0$

tel que le disque ouvert $D(a, r)$ de centre a et de rayon r soit contenu dans O . On note γ le chemin $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Si f est une fonction holomorphe sur O alors pour tout $z \in D(a, r)$ on a:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

1.4.5 Quelques transformations classiques

Transformation linéaire

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ est une double transformation expansion/contraction liée au coefficient a et rotation d'un angle α .

Transformation inverse

Une transformation linéaire $w = z^{-1}$ pour z non nul transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation linéaire fractionnelle

La transformation:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

Avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

1.4.6 Transformation de Schwarz-Christoffel

Cette transformation conforme transforme l'intérieur d'un polygone dans le plan z en le demi-plan supérieur ($\Im(Z) > 0$). Elle est définie par :

$$\frac{dZ}{dz} = K(Z - a)^{\frac{\alpha - \pi}{\pi}}(Z - b)^{\frac{\beta - \pi}{\pi}}(Z - c)^{\frac{\lambda - \pi}{\pi}}$$

Où K est une constante complexe, $a, b, c, \dots$ les points de l'axe réel images des sommets du polygone et $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ les angles intérieurs au polygone.

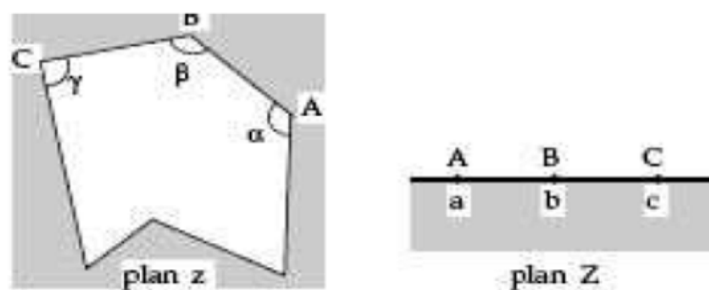


Figure-1.3-Transformation de Schwarz-Christoffel

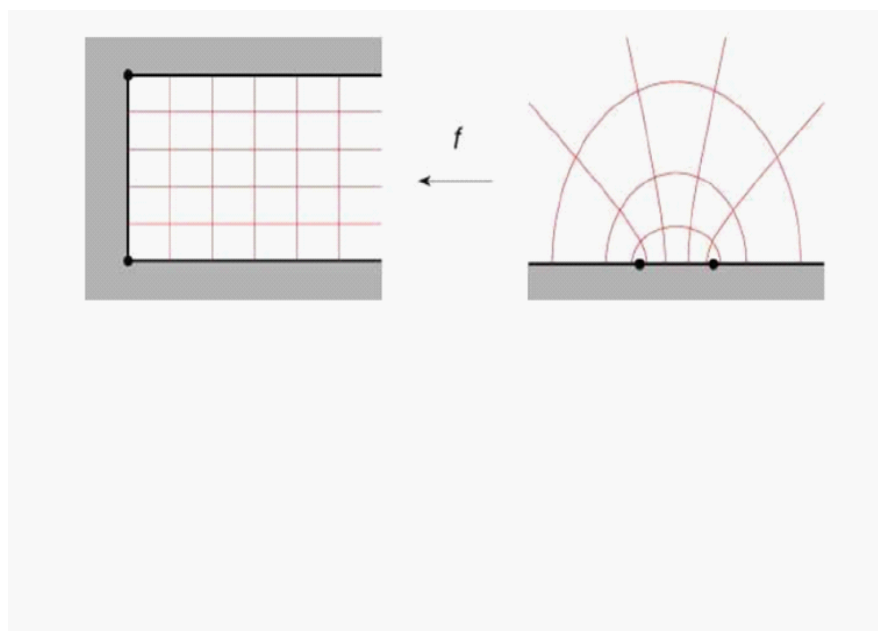


Figure-1.4-Transformation conforme transformant une cavité en "U" en un demi-plan.

Chapitre 2

Problème d'un fluide issu d'un réservoir rectangulaire

2.1 Résumé

Dans ce chapitre on va étudier un problème d'écoulement bidimensionnel et stationnaire d'un fluide parfait et incompressible dans un canal de forme rectangulaire de largeur $2H$, la résolution de ce type des problèmes est très difficile, à cause de la présence des forces superficielles.

La solution exacte peut être calculée par la méthode des lignes de courant libres et la transformation de Schwartz-Christoffel.

2.2 Introduction

Dans notre étude on suppose que les effets de gravités et de tension de surface sont négligés. La solution exacte de l'écoulement peut être trouvée en utilisant la méthode des lignes de courant libres introduite par Kirchhoff(1869). La méthode consiste à considérer les écoulements limités partiellement par des parois rigides rectilignes et d'autre part par des surfaces libres de formes inconnues. Cette méthode est basée sur l'introduction d'une transformation conforme, définie par :

$$\begin{aligned}\Omega &= \log \left(\frac{dz}{df} \right) = \log (u - iv)^{-1} \\ &= \log q^{-1} + i\theta\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Où $z = x + iy$, $f = \varphi + i\psi$.

q et θ sont le module de la vitesse et l'angle entre la vecteur vitesse et l'horizontale (l'axe $x'ox$) respectivement.

La propriété de la variable Ω est la suivante:

- La partie réelle est constante sur chaque surface libre, c'est-à-dire:

$$\log \frac{U}{q} = cte$$

- La partie imaginaire est constante sur chaque paroi rectiligne, c'est-à-dire :

$$\theta = 0$$

Ainsi, le domaine de l'écoulement dans le plan physique sera transformé en un polygone dans le plan Ω . Dans ces conditions la solution du problème peut être obtenue exactement. De même la fonction $f = \varphi + i\psi$ transforme le domaine de l'écoulement dans le plan physique en une bande infinie. On sait, d'après le théorème de Schwarz-Christoffel, qu'il est toujours possible de trouver une transformation conforme qui applique l'intérieur ou l'extérieur d'un polygone plan en un demi-plan d'un autre plan. Une telle transformation met en correspondance la région indiquée du plan Ω , ainsi que celle du plan f sur la moitié supérieure du plan d'une certaine variable complexe λ . Dans ce cas, on trouve une relation entre Ω et f , à partir de cette dernière, on trouve une expression de f en fonction de z est obtenue par intégration.

2.3 Position du problème

On suppose un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre issu d'un orifice de largeur $2L$ d'un réservoir semi infini de hauteur $2H_0$ voir figure (2.1), où l'effet de gravité et tension de surface sont négligés.

Du à la symétrie de l'écoulement par rapport à la ligne de courant EOC , on prend comme axes de coordonnées la ligne de courant EOC sur l'axe $x'ox$ et la paroi BC sur l'axe $y'oy$. notons que lorsque $x \rightarrow -\infty$ la vitesse est constant on note par U_0 et pour x positif l'écoulement est limité supérieurement par la surface libre CD inférieurement par la surface libre $C'D'$. Nous supposons que l'écoulement à l'infini ($x \rightarrow +\infty$) est uniforme et de vitesse U et déviation H .

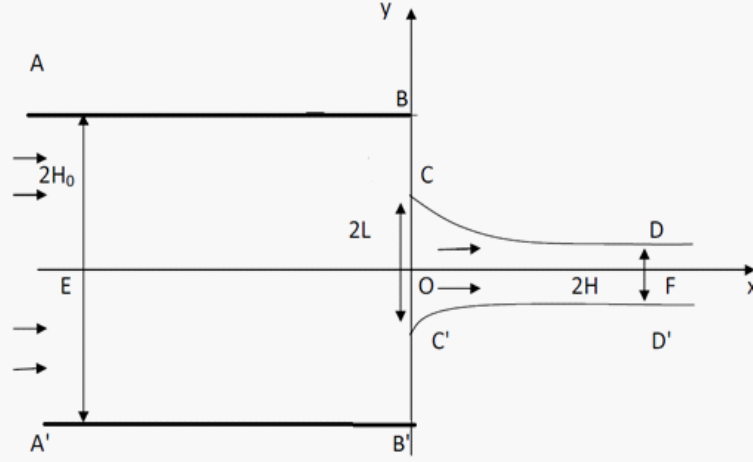
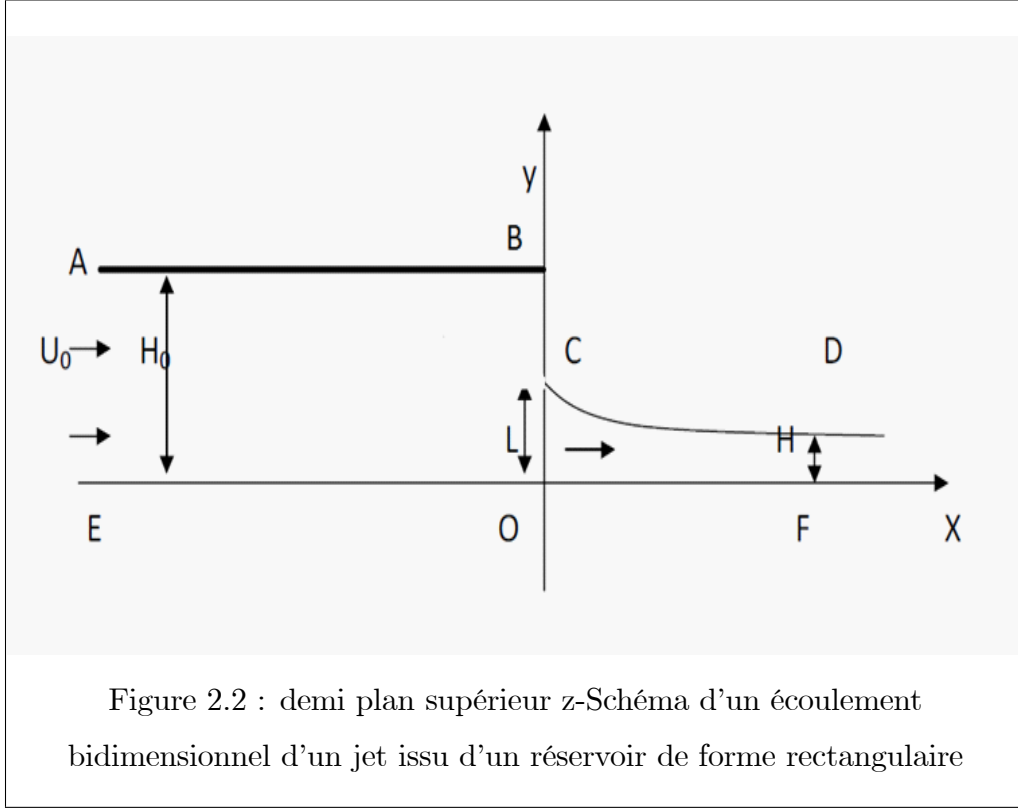


Figure 2.1 : PlanZ-Schéma d'un écoulement bidimensionnel d'un jet issu d'un réservoir de forme rectangulaire



Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction potentiel de vitesse $\varphi(x, y)$ qui satisfait l'équation donnée par :

L'équation de continuité:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ (Dans le domaine de l'écoulement)} \quad (2.3.1)$$

Avec les conditions:

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow Ux \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty \text{ (condition de radiation)} \\ \varphi \rightarrow U_0 x \text{ lorsque } x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Et les conditions aux bords:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \text{ sur } EOD \text{ et } AB \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ sur } BC \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = cte \text{ sur les surfaces libres } CD \text{ et } C'D'. \quad (2.3.4)$$

En raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe $x'ox$, on peut restreindre notre étude au demi-plan supérieur, l'axe de symétrie étant considéré comme ligne de courant.

Comme la fonction φ est harmonique à l'intérieur du domaine de l'écoulement qui est connexe, alors, d'après le théorème de Cauchy, pour déterminer la solution en n'importe quel point du domaine de l'écoulement, il suffit de trouver la fonction φ qui vérifie l'équation (2.2.1), avec les conditions (2.3.2) et (2.3.3).

Dans ce qui suit, on va utiliser la théorie de la fonction complexe pour résoudre le problème. pour ce la, on identifie le plan d'écoulement $x'ox$ au plan complexe z on écrivant $z = x + iy$. Les fonctions $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ et $\frac{df}{dz} = \zeta = u - iv$, sont des fonctions analytiques de la variable z . et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$.

2.4 Formulation du problème.

Notons par $\zeta = u - iv$, où (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse dans la direction de x et y respectivement et par $f = \varphi + i\psi$ la fonction potentielle complexe où φ et ψ représente respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant.

On suppose que la densité ρ du fluide est constante ainsi que la pression p sur la surface libre (pression atmosphérique). Les conditions sur la surface libre sont données par l'équation de Bernoulli.

$$\frac{1}{2} |\zeta|^2 + \frac{p}{\rho} = cte \text{ sur } CD \quad (2.4.1)$$

$$q = |\zeta| = cte \text{ sur } CD \quad (2.4.2)$$

Alors la vitesse est constante sur la surface libre CD .

2.5 Résolution du problème:

On utilise la transformation des lignes de courant libre on trouve :

$$\begin{aligned}\Omega &= \log \left(\frac{U dz}{df} \right) = \log \left(\frac{U}{u - iv} \right) \\ &= \log \frac{U}{q} + i\theta\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

Où:

θ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

Cette transformation nous transforme le domaine occupé par le fluide en une bande semi-infini voir la figure (2.3).

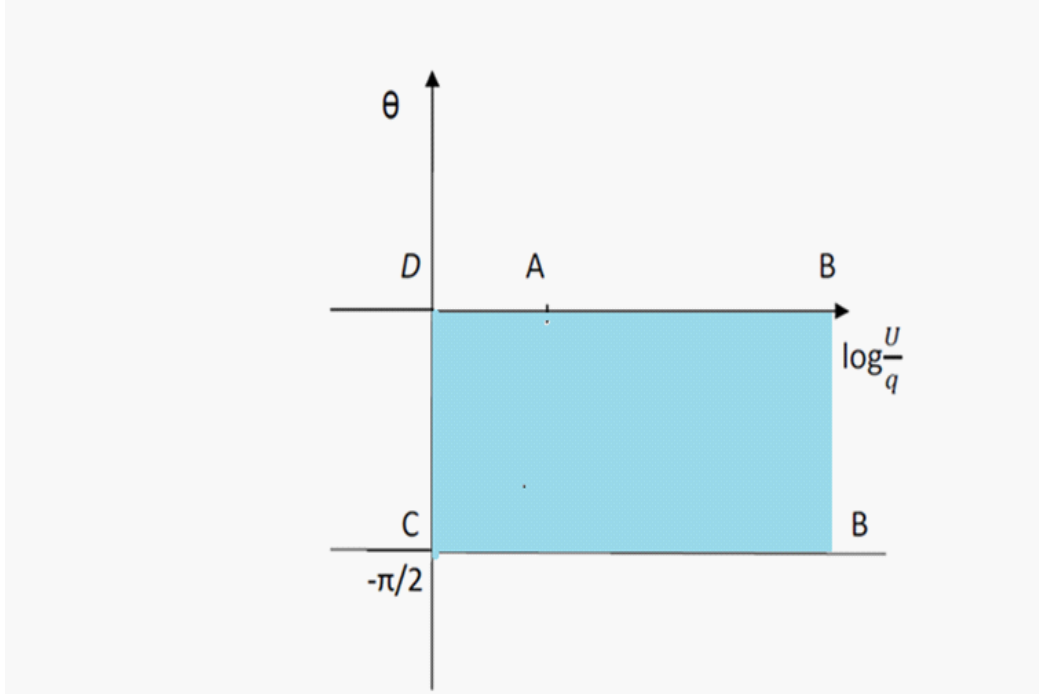


Figure-2.3-le plan- Ω -Transformé du plan z par la transformation de Kirchhoff

Nous choisissons $\varphi = 0$ au point $(x, y) = (0, 0)$ et $\psi = 0$ sur la ligne EOC .

Par conséquent $\psi = HU$ sur la ligne de courant ABD voir la figure (2.4).

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan Ω au demi-plan supérieur d'un autre plan complexe λ est donnée par le théorème de Schwarz-Christoffel. En respectant le sens et l'orientation de l'écoulement.

On choisit $C = 1$, $A = -1$ et $D = 0$, B à l'infini sur le plan λ voir la figure(2.5).

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{d\lambda} &= \mathbf{a}(\lambda - 1)^{\frac{\pi}{2}-1}(\lambda - 0)^{\frac{\pi}{2}-1}(\lambda + 1)^{\frac{\pi}{2}-1} \\ &= \mathbf{a}(\lambda - 1)^{\frac{-1}{2}}\lambda^{\frac{-1}{2}}\end{aligned}$$

Par intégration on trouve:

$$\Omega = \mathbf{a} \int (\lambda - 1)^{\frac{-1}{2}} \lambda^{\frac{-1}{2}} + \mathbf{b} \quad (2.5.2)$$

En faisant le changement de la variable $\delta = 2\lambda - 1$ dans (2.5.2) on obtient:

$$\Omega = \mathbf{a} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\delta^2 - 1}} + \mathbf{b}$$

D'où:

$$\Omega = \mathbf{a} \arg ch(2\lambda - 1) + \mathbf{b} \quad (2.5.3)$$

Où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des constantes à déterminer. Pour la détermination de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, on utilise les conditions:

1) Pour $\lambda = 1$ alors $\Omega(1) = -i\frac{\pi}{2}$, on substitue la valeur de $(\lambda = 1)$ dans (2.5.3) .

On trouve:

$$\begin{aligned}-i\frac{\pi}{2} &= \mathbf{a} \arg ch(1) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

Donc:

$$\mathbf{b} = -i\frac{\pi}{2}$$

En substitue $\mathbf{b}$ dans l'équation (2.5.3) , on aura:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 + ch \left(\frac{\Omega + i\frac{\pi}{2}}{\mathbf{a}} \right) \right) \quad (2.5.4)$$

2) Pour $\lambda = 0$ alors $\Omega(0) = 0$, on substitue la valeur de $(\lambda = 0)$ dans (2.5.3) .

On trouve:

$$0 = \mathbf{a}i\pi - \mathbf{i}\frac{\pi}{2}$$

Alors:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}$$

On substitue les valeurs de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans l'équation (2.5.4), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(1 - ch(2\Omega)) \\ &= -sh^2\Omega \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

L'équation (2.5.5) nous donne une relation entre λ et Ω .

La seconde partie du travail consiste à trouver par la méthode des transformations conformes une relation entre λ et f .

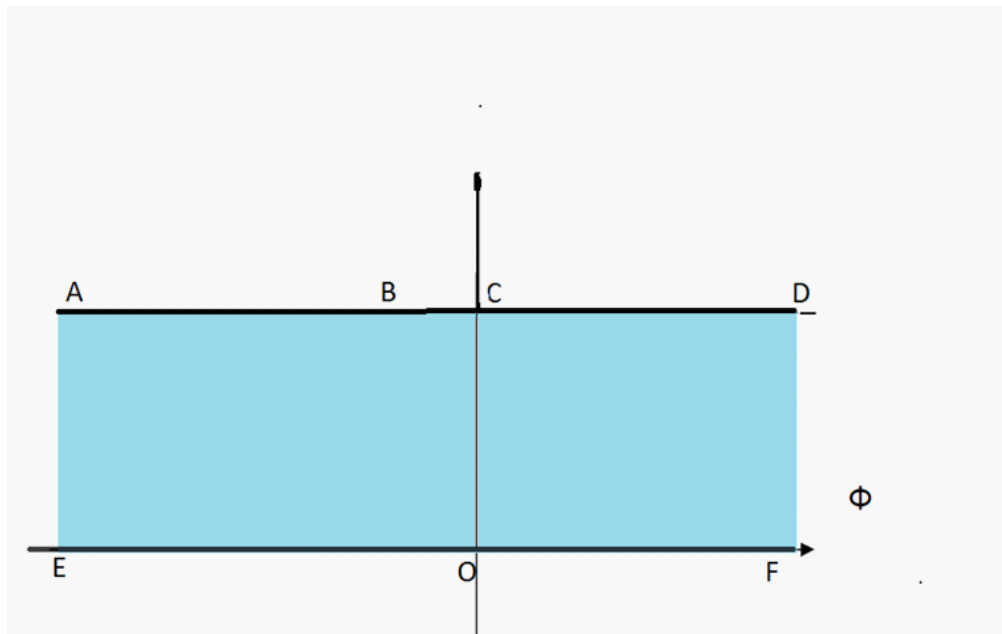
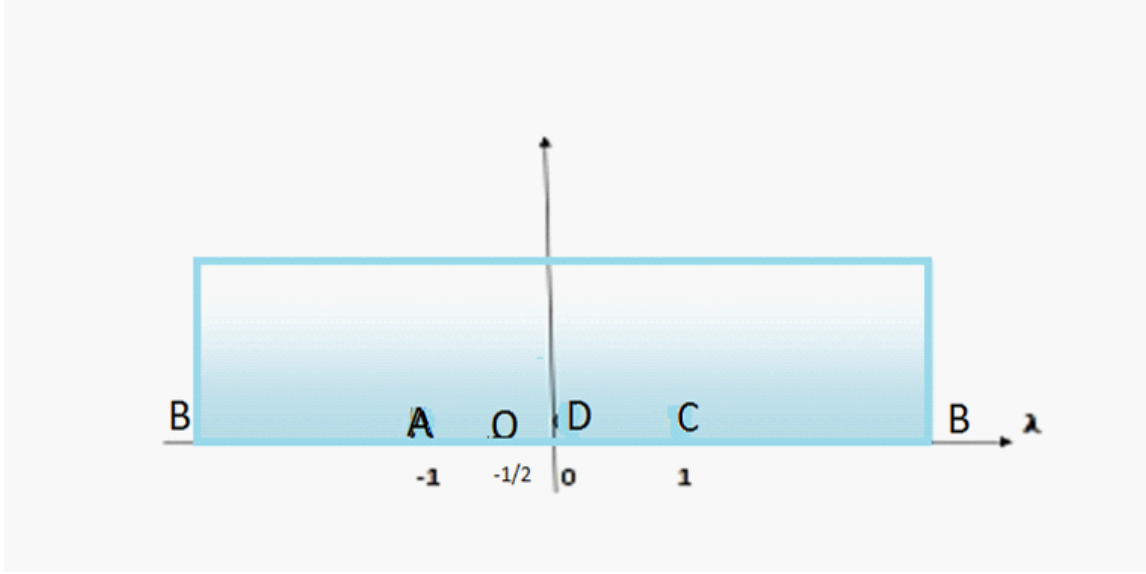


Figure-2.4-Plan de la variable f


Figure-2.5-Plan de la variable λ

En utilisant encore une fois le théorème de Schwarz-Christoffel et en respectant la correspondance des $B = iH$, $C = iH$, A et D à l'infini du plan f au points $A = -1$, $D = 0$, $C = 1$ et B à l'infini sur le plan λ voir la figure (2.5).

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= \mathbf{a}(\lambda + 1)^{-1}(\lambda - 0)^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{a}}{(\lambda + 1)\lambda} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Par intégration on trouve :

$$f = \mathbf{a} \int \frac{d\lambda}{(\lambda + 1)\lambda} \quad (2.5.7)$$

On faisant le changement de la variable $\delta = 2\lambda - 1$ dans (2.5.7) on obtient:

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{a} \int \frac{d\delta}{\delta^2 - 1} + \mathbf{b} \\ &= -\mathbf{a} \int \frac{d\delta}{1 - \delta^2} + \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ce qui donne, après intégration:

$$f = -\mathbf{a} \operatorname{argth} \delta + \mathbf{b} \quad (2.5.8)$$

Nous avons:

$$\operatorname{argth} \delta = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right)$$

Alors:

$$\begin{aligned} f &= \frac{-\mathbf{a}}{2} \log \frac{\lambda + 1}{-\lambda} + \mathbf{b} \\ &= \frac{-\mathbf{a}}{2} \log \frac{\lambda + 1}{\lambda} - \frac{i\pi\mathbf{a}}{2} + \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Pour déterminer les constantes $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, on utilise le fait qu'au point C on a:

$$f = i \text{ et } \lambda = 1$$

On substitue la valeur de $(\lambda = 1)$ dans (2.5.9) .

On trouve:

$$i = \frac{-\mathbf{a}}{2} \log (2) - \frac{\mathbf{a}i\pi}{2} + \mathbf{b} \quad (1)$$

Et au point O on a:

$$f = 0 \text{ et } \lambda = \frac{-1}{2}$$

On substituer la valeur de $(\lambda = \frac{-1}{2})$ dans (2.5.9) .

On trouve:

$$0 = -\mathbf{a}i\pi + \mathbf{b} \quad (2)$$

Alors d'après (1) – (2) on trouve:

$$a = \frac{2i \ln 2 - 2\pi}{\pi^2 + (\ln 2)^2}$$

On remplaçant la valeur de $\mathbf{a}$ dans (2), on trouve:

$$\mathbf{b} = \frac{-2i\pi^2 - 2\pi \ln 2}{\pi^2 - (\ln 2)^2}$$

On substitue $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans (2.5.9) on obtient :

$$f = \frac{\pi + i \ln 2}{\pi^2 + (\ln 2)^2} \log \frac{\lambda + 1}{\lambda} + \frac{\pi \ln 2 - i\pi^2}{\pi^2 + (\ln 2)^2} \quad (2.5.10)$$

On pose $\alpha = \frac{\pi + i \ln 2}{\pi^2 + (\ln 2)^2}$, et $\beta = \frac{\pi \ln 2 - i\pi^2}{\pi^2 + (\ln 2)^2}$ telle que (α et $\beta \in \mathbb{Z}$) alors:

$$f = \alpha \log \frac{\lambda + 1}{\lambda} + \beta$$

Donc on trouve une relation entre λ et f :

$$\lambda = \frac{1}{\exp\left(\frac{f-\beta}{\alpha}\right) - 1}$$

D'où l'on tire, en utilisant (2.5.5), la relation entre Ω et f :

$$\lambda = \frac{1}{\exp\left(\frac{f-\beta}{\alpha}\right) - 1} = -sh^2\Omega$$

Comme:

$$\lambda = -sh^2\Omega = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\exp(2\Omega) + \exp(-2\Omega)}{2} \right) \quad (2.5.11)$$

On substitue (2.5.1) dans (2.5.11), on trouve après simplification:

$$\lambda = -\frac{1}{4} \left(-2 + U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 + \frac{1}{U^2} \left(\frac{d f}{dz} \right)^2 \right) \quad (2.5.12)$$

On pose $Y = U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2$, l'équation (2.5.12) devient

$$Y^2 - 2(1 - 2\lambda)Y + 1 = 0$$

Dont la solution s'écrit:

$$Y = U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 = (1 - 2\lambda) \pm 2i\sqrt{1 - (1 - 2\lambda)^2}$$

Comme $U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 = -2i$ lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$

On prend donc le signe négatif de la racine, i.e:

$$U^2 \left(\frac{dz}{df} \right)^2 = (1 - 2\lambda) - i2\sqrt{1 - (1 - 2\lambda)^2}$$

On résolvant cette équation on trouve.

$$\begin{aligned} U \frac{dz}{df} &= \sqrt{\lambda} - i\sqrt{1 - \lambda} & , U \frac{dz}{df} &= \sqrt{1 - \lambda} - i\sqrt{\lambda} \\ U \frac{dz}{df} &= -\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1 - \lambda} & , U \frac{dz}{df} &= -\sqrt{1 - \lambda} + i\sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{cases} U \frac{dz}{df} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{lorsque } \lambda = \frac{1}{2} \\ U \frac{dz}{df} = i & \text{lorsque } \lambda = 1 \end{cases}$$

On choisit

$$U \frac{dz}{df} = \sqrt{1 - \lambda} - i\sqrt{\lambda} \quad (2.5.13)$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} U \frac{dz}{d\lambda} &= U \frac{dz}{df} \frac{df}{d\lambda} \\ &= \frac{2i \ln 2 - 2}{(\pi^2 + \ln^2 2)} \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda} - i\sqrt{\lambda}}{\lambda(1 + \lambda)} \right) \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

On obtient:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2i \ln 2 - 2}{U(\pi^2 + \ln^2 2)} \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda} - i\sqrt{\lambda}}{\lambda(1 + \lambda)} \right)$$

On intègre:

$$z = \frac{2i \ln 2 - 2}{U(\pi^2 + \ln^2 2)} \int \frac{\sqrt{1 - \lambda} - i\sqrt{\lambda}}{\lambda(1 + \lambda)} d\lambda + z_0$$

Où z_0 est la constante d'intégration.

Sur la surface libre, $f = \varphi$, $\varphi > 0$, donc la forme de surface libre est donnée par:

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} \left[\frac{2i \ln 2 - 2}{U(\pi^2 + \ln^2 2)} \int \frac{\sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda}}{\lambda(1+\lambda)} d\lambda \right] + x_0 \\ y = \operatorname{Im} \left[\frac{2i \ln 2 - 2}{U(\pi^2 + \ln^2 2)} \int \frac{\sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda}}{\lambda(1+\lambda)} d\lambda \right] + y_0 \end{cases} \quad (2.5.15)$$

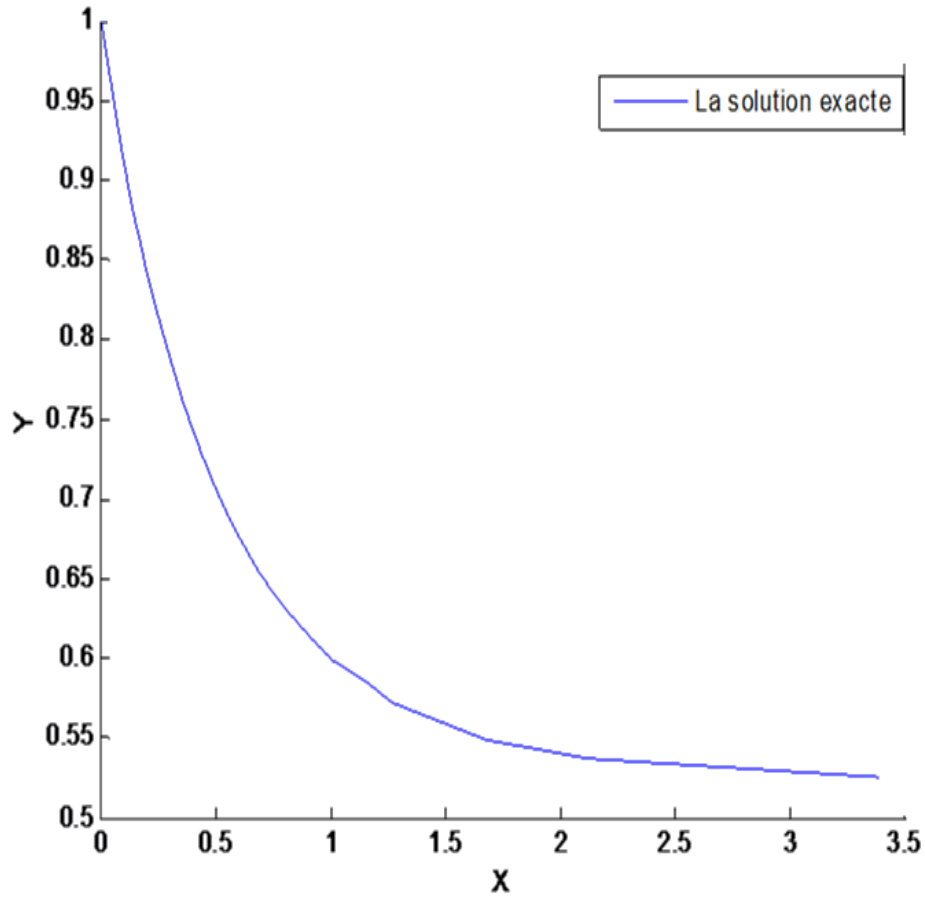


Figure-2.6-La forme de la surface libre

Chapitre 3

Annexe

3.1 Outils mathématiques de la théorie des champs :

3.1.1 Opérateur gradient :

Définition 3.1.1 : A tout champs scalaire $f(M)$, on associe un champ vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ tel que:

$$df(M) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) d\vec{M}$$

Proposition 3.1.1 : La circulation d'un gradient est indépendante du chemin suivi.

En particulier sur une courbe fermée, la circulation du gradient est nulle.

Expressions analytiques :

En coordonnées cartésiennes : On a en coordonnées cartésiennes dans la base (e_1, e_2, e_3) pour une fonction $f = f(x_1, x_2, x_3)$:

$$(\overrightarrow{\text{grad}}(f))_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

En coordonnées cylindriques: On a de la base (e_r, e_θ, e_z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

En coordonnées sphérique: On a de la base (e_r, e_θ, e_ϕ)

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r} \frac{1}{\sin(\theta)} e_\phi \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

3.1.2 Gradient d'un vecteur :

On peut définir le gradient d'un vecteur $\vec{V}$ de taille n , c'est une matrice de taille $n \times n$ et

On a :

$$(\overrightarrow{grad}(\vec{V}))_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

3.2 Opérateur divergence :

3.2.1 Théorème (Théorème de Green-Ostrogradski) :

Soit Σ la surface fermé délimitant le volume v , ds le vecteur de surface élémentaire sortant du volume. On a alors pour tout champ de vecteur $\vec{V}$:

$$\int \int_{\Sigma} \vec{V} \vec{ds} = \int \int \int_v \text{div}(\vec{V}) d\tau$$

3.2.2 Expressions analytique

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques: On a

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3.3 Opérateur rotationnel :

Définition 3.3.1 : Soit un champ vectoriel $\vec{V}$ et soit $\vec{ds}$ un élément de surface en un point M de l'espace, on note que dc le contour élémentaire orienté associé à $\vec{ds}$ selon la règle de stokes, on définit le rotationnel de $\vec{V}$ en $\vec{M}$ par:

$$dc = \int_{dc} \vec{V} d\vec{t} = \overrightarrow{rot} \vec{V} \vec{ds}$$

L'opérateur rotationnel construit un champ de vecteurs à partir d'un champ de vecteurs.

3.3.1 Expressions analytique

En coordonnées cartésiennes : On a:

$$\overrightarrow{rot A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) e_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) e_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) e_3$$

En coordonnées cylindriques: On a:

$$\overrightarrow{rot A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) e_z$$

Proposition 3.3.1 : Si un champ de vecteur $\vec{W}$ est à flux conservatif c'est à dire :

$div \vec{W} = 0$ Alors il existe un champ de vecteur $\vec{V}$ tel que :

$$\vec{W} = rot \vec{V}$$

3.4 Opérateur Laplace :

Définition 3.4.1 (Laplace d'un champ scalaire) : Transforme un champ scalaire en

Champ scalaire :

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad f})$$

3.4.1 Expressions analytique :

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

En coordonnées cylindriques: On a:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphérique: On a

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

Définition 3.4.2 (Laplace d'un champ vectoriel) : Transforme un champ vectoriel

en un champ vectoriel :

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$$

3.4.2 Expression analytique du Laplace vectoriel :

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \sum_{i=1}^n \Delta V_{x_i} e_i$$

3.5 Opérateur symbolique nabla :

C'est un opérateur de dérivation vectoriel.

Ses composantes en coordonnées cartésiennes sont :

$$(\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On peut écrire le gradient, la divergence et le rotationnel grâce à cet opérateur symbolique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \vec{V}$$

$$\Delta f = \overrightarrow{V^2} f$$

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \overrightarrow{V^2} \vec{V}$$

3.5.1 Formulaire relatif aux opérateurs :

Soit f un champ scalaire, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux champs vectoriels :

La divergence d'un gradient est égale au Laplace :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f$$

Le rotationnel d'un gradient est nul :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = 0$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié un Problème d'un fluide issu d'un réservoir rectangulaire devant une plaque verticale à l'horizontale.

Et on a vu que dans cette étude, on a trouvé la solution exacte de ce problème si on néglige les forces de gravité et l'effet de tension de surface.

Bibliographie

- [1] M. Damou. *Mécanique des fluides*, (O.P.U), Septembre 1993.
- [2] A. Quarteroni. *Lignes de courant de fluides incompressibles*, 2007-2008.
- [3] J. Gosse, *Mécanique des fluides*(53-64), 1976.
- [4] A. Gasmi. *Ecoulement potentiel et bidimensionnel issu d'un orifice d'un réservoir*, Thèse de Magister, 1997.
- [5] C. Ancey, *Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides*, (L.H.E) CH-1015 Lausanne.
- [6] M. Rabaud, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, 2006 Springer.
- [7] A. GASMI, *L'effet de la tension de surface sur le coefficient de contraction d'un jet*, Thèse de Doctorat, Université de Setif.
- [8] B. Bouderah , A. Gasmi and H. Serguine, *Zero gravity of free surface jet flow*, (LPAM) N°66(3273 - 3277), 2007.
- [9] F. TOISON, *Validation d'une méthode numérique générale de calcul d'écoulements bidimensionnels de fluide parfait*.
- [10] A. Merabet , *Analyse des caractéristiques aérodynamiques d'une aile d'un avion de différents profils sous l'effet des vitesses subsoniques*, Thèse de Doctorat.
- [11] C. Grossetête. *Mécanique des fluides*, Ellipses, Paris, 1991.

- [12] H. Serguine, *Numerical resolution of a non-linear problem in a field at free border due to a jet against a infinite vertical plate. Thesis of Magister, University of M'sila, (2004).*